MATHÉMATIQUES I

Algèbre et analyse

OPTIONS GÉNÉRALE ET TECHNOLOGIQUE

DURÉE : 4 heures

Avec ce sujet seront distribuées deux feuilles de papier millimétré.

Attention. — Il ne sera pas fourni de feuille supplémentaire.

L'utilisation de papiers différents apportés par le candidat serait assimilée à une tentative de fraude.

Il est rappelé aux candidats qu'une pénalisation d'un maximum de 2 points (sur 20) sanctionnera le manque de soin apporté à la présentation des copies (fautes d'orthographe, copie peu lisible, ...).

L'épreuve est constituée d'un exercice noté sur 7 points et d'un problème noté sur 13 points.

EXERCICE (*sur 7 points*)

On considère l'espace vectoriel E_n des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, où n est un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2.

On note : 0 la matrice nulle de E_n

I la matrice unité de E_n

Soit A un élément de E_n tel que : $A \neq 0$ et $A \times A = 0$

1° α et β étant deux réels, montrer que :

$$\alpha A + \beta I = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

2° Soit E'_n le sous-espace vectoriel de E_n engendré par $\{A, I\}$.

Quelle est la dimension de E'_n?

Montrer que E'_n est stable pour la multiplication des matrices.

3° On pose : $B = A + I$.

a. Déterminer un élément B' de E'*n* vérifiant : $B \times B' = I$.

Que peut-on dire de B' relativement à B?

b. Calculer B^2 et B^3 en fonction de A et I.

c. p étant un entier strictement positif, calculer B^p en fonction de p, A et I.

En déduire $S_p = B + B^2 + \ldots + B^p$ en fonction de p, A et I.

4° *Application numérique* :

On suppose $n = 3$.

Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

a. Calculer $(B - I)^2$.

b. Déterminer la matrice inverse de B.

c. Calculer en fonction de p, $(p \in \mathbb{N}^*)$:

$$S_p = B + B^2 + \ldots + B^p$$

5° Soit u une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, vérifiant :

$u \neq 0$ et $u \circ u = 0$

0 désigne l'application nulle de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même.

a. Vérifier l'inclusion : $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$.

b. Déterminer les dimensions de $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$.

6° Soit v l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même de matrice B – I sur la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$. B désigne la matrice donnée dans la question 4.

Donner une base de $\operatorname{Im} v$ et de $\operatorname{Ker} v$.

En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ sur laquelle la matrice de v s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PROBLÈME (*sur 13 points*)

Dans tout le problème, on désigne par E l'ensemble : $]0,1[\cup]1, +\infty[$.

I

On considère la fonction $f : E \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{\ln x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Le symbole ln désigne le logarithme népérien.

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f, dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Unités : 8 cm sur l'axe $(O, \vec{i})$

2 cm sur l'axe $(O, \vec{j})$

1° *a.* Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur E.

b. Donner le tableau de variation de f.

c. Donner les coordonnées du point d'inflexion de $\mathcal{C}$ et une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.

d. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

2° *a.* Montrer que pour tout x appartenant à $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ on a :

$$2(x - 1) \leq \ln x$$

b. En déduire que pour tout α appartenant à $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$ on a :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\alpha} f(x)\,dx \leq \int_{\frac{1}{2}}^{\alpha} \frac{1}{2(x-1)}\,dx$$

.../...

II

On pose :

$$F(x) = \int_x^{x^2} f(t)\,dt$$

1° *a.* Montrer que F est définie sur E. Préciser le signe F.

b. Démontrer que F est dérivable sur E.
Calculer $F'(x)$ pour x non nul. En déduire les variations de F.
Préciser $F'(0)$.

2° *a.* Démontrer que pour x strictement supérieur à 1, on a :

$$F(x) > \frac{x(x-1)}{2 \ln x}$$

b. En déduire la limite de F en $+\infty$ et la nature de la branche infinie de la courbe représentative Γ de F.

3° On se propose de prouver que F admet une limite en 1.

a. Soit φ la fonction : $\left]\frac{1}{2}, 4\right[\to \mathbb{R}$

$$t \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t = 1 \\ \dfrac{t-1}{\ln t} & \text{si } t \neq 1 \end{cases}$$

Montrer que φ est continue sur $\left]\frac{1}{2}, 4\right[$ et justifier l'existence d'un réel M tel que pour tout t élément de $\left]\frac{1}{2}, 4\right[$ on ait :

$$\varphi(t) \leqslant M$$

b. Soit ψ : $\left]\frac{1}{2}, 4\right[\to \mathbb{R}$

$$t \longmapsto (t-1)^2 - (t-1) + \ln t$$

Prouver que la fonction ψ est positive ou nulle.

En déduire que pour tout t élément de $\left]\frac{1}{2}, 1\right[\cup \left]1, 4\right[$, on a :

$$\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} \leqslant \varphi(t)$$

On rappelle que pour tout t de $\mathbb{R}_+^*$ on a : $\ln t \leqslant t - 1$.

c. Montrer que pour tout x élément de $\left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[$, on a :

$$0 \leqslant \int_{x^2}^{x} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}\right) dt \leqslant M x (1-x)$$

puis que pour tout x élément de $]1, 2[$ on a :

$$0 \leqslant \int_{x}^{x^2} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}\right) dt \leqslant M x (x-1)$$

En déduire que :

$$\lim_{x \to 1} \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}\right) dt = 0$$

d. Prouver alors que F admet ln 2 pour limite en 1.

e. Calculer la limite de F' en 1. En déduire que F admet un prolongement G dérivable en 1.

4° Donner l'allure de la courbe représentant la fonction prolongée G.

III

Pour n entier naturel non nul, on considère la fonction :

$$f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{(\ln x)^n} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

1° *a.* Étudier la continuité de f_n sur E.

b. Étudier les variations de f_n. (On discutera suivant la parité de n.)

c. On note x_n l'abscisse du point d'inflexion de la courbe représentative de f_n.
Prouver que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

2° *a.* Justifier l'existence de l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\frac{1}{e}} f_n(x)\,dx$$

b. Montrer que pour tout entier naturel non nul :

$$|I_n| \leqslant \frac{1}{e}$$

c. Pour n entier strictement supérieur à 1, exprimer I_n en fonction de n et de I_{n-1}.

d. Déduire des deux questions précédentes que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.